No	チェック項目	チェック
1		☐
2		☐
3	$\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ の積分	☐
4		☐
5		☐
6		☐
7		☐
8		☐
9		☐
10		☐
11		☐
12		☐
13		☐
14		☐
15	偏微	☐
16		☐
17		☐
18	波動方程式の境界条件	☐
		☐
		☐

3C-2　16

(1) $y = x^2$

$y' = 2x$

$y'' = 2$

これらを与式の左辺に代入すると、

$$2 - \frac{4+x}{x}\cdot 2x + \frac{6+2x}{x^2}\cdot x^2 = 2-(8+2x)+(6+2x) = 0$$

と与式をみたすので、$y = x^2$ は解である。

(2) $y = ux^2$ とおくと、

$y' = u'x^2 + u\cdot 2x$

$y'' = u''x^2 + u'\cdot 2x + u'\cdot 2x + u\cdot 2$

$= x^2u'' + 4xu' + 2u$

これらを与式に代入すると、

$$(x^2u''+4xu'+2u) - \frac{4+x}{\cancel{x}}(x^2u'+2\cancel{x}u) + \frac{6+2x}{\cancel{x^2}}\cdot u\cancel{x^2} = 0$$

$$x^2u'' + \cancel{4xu'} + \cancel{2u} - (\cancel{4xu'} + \cancel{8u} + x^2u' + \cancel{2xu}) + \cancel{6u} + \cancel{2xu} = 0$$

$$x^2u'' - x^2u' = 0$$

$$\therefore u'' - u' = 0 \quad \cdots ①$$

(3) ①をとく。$p = u'$ とおくと、

$$\frac{dp}{dx} - p = 0$$

$$\int \frac{1}{p}dp = \int dx$$

$$\log|p| = x + C_1 \quad (\forall C_1 \in \mathbb{R})$$

$$\therefore p = C_1e^x$$

$$\frac{du}{dx} = C_1e^x$$

$$\int du = \int C_1e^x\,dx$$

$$\therefore u = C_1e^x + C_2 \quad (\forall C_2 \in \mathbb{R})$$

これより、

$$y = (C_1e^x + C_2)x^2$$

3C-3

(1) 与式の両辺に $e^{\int P dx}$ をかけると、

$$e^{\int P dx} y' + P(x) e^{\int P dx} y = Q(x) e^{\int P dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{\int P dx} \right) = Q(x) e^{\int P dx}$$

両辺 x で積分して、

$$y e^{\int P dx} = \int Q(x) e^{\int P dx} dx$$

$$\therefore y = e^{-\int P dx} \int Q(x) e^{\int P dx} dx$$

(2)

(i) $2xy' + y = 2x^2$

$$y' + \frac{1}{2x} y = x$$

$$\frac{d}{dx}\left(y\sqrt{x} \right) = x^{\frac{3}{2}}$$

$$y\sqrt{x} = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C \quad (\forall C \in \mathbb{R})$$

$$\therefore y = \frac{2}{5} x^2 + \frac{C}{\sqrt{x}}$$

(ii) $(1+x^2) y' = xy + 1$

$$y' - \frac{x}{1+x^2} y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} y \right) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} y = \int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

右辺について、$x = \tan t$ とおくと、

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \cos^3 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \cos t \, dt$$

$$= \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

より、

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$\therefore y = x + C\sqrt{1+x^2}$$

6/4

3c − 4　　　　　　　　　　7

(1) $x' = -\lambda y$ ⋯ ①

$y' = \lambda x$ ⋯ ②

①を両辺tで微分し，②を代入，

$$x'' = -\lambda \cdot \lambda x = -\lambda^2 x$$

これをとくと，

$$x = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t \qquad (\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

求めたxを①に代入，

$$-\lambda y = -C_1 \lambda \sin \lambda t + C_2 \lambda \cos \lambda t$$

$$\therefore y = C_1 \sin \lambda t - C_2 \cos \lambda t$$

条件より，

$$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 2 = -C_2 \end{cases}$$

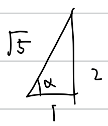
$$\therefore \begin{cases} x = \cos \lambda t - 2 \sin \lambda t \\ y = \sin \lambda t + 2 \cos \lambda t \end{cases}$$

(2) (1)より，

$$x^2 + y^2 = \cos^2 \lambda t - 4 \sin \lambda t \cos \lambda t + 4 \sin^2 \lambda t + \sin^2 \lambda t + 4 \sin \lambda t \cos \lambda t + 4 \cos^2 \lambda t$$

$$= 5$$

これは原点中心半径$\sqrt{5}$の円



$$x = \cos \lambda t - 2 \sin \lambda t$$

$$= \sqrt{5} \cos \alpha \cos \lambda t - \sqrt{5} \sin \alpha \sin \lambda t$$

$$= \sqrt{5} \cos (\lambda t + \alpha)$$

$$y = \sin \lambda t + 2 \cos \lambda t$$

$$= \sqrt{5} \cos \alpha \sin \lambda t + \sqrt{5} \sin \alpha \cos \lambda t$$

$$= \sqrt{5} \sin (\lambda t + \alpha)$$

より，$t = 0$でα，tのλ倍で回転する円。

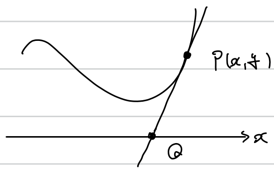
3C-5

27

Pの座標を一度(x_0, y_0)とおく。

(x_0, y_0)における接線の方程式は、

$$y - y_0 = y'(x_0, y_0)(x - x_0)$$



であり、Qはこの直線上にあり、$y=0$なので、

Qのx座標は、

$$-y_0 = y'(x_0, y_0)(X - x_0)$$

$$\therefore X = x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0, y_0)}$$

PQの長さをlとおくと、

$$l^2 = (x_0 - X)^2 + y_0^2 = \left(\frac{y_0}{y'(x_0, y_0)}\right)^2 + y_0^2$$

$$= y_0^2\left(1 + \frac{1}{\{y'(x_0, y_0)\}^2}\right)$$

題より、$X = l$なので、

$$X^2 = l^2$$

$$\left\{x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0, y_0)}\right\}^2 = y_0^2\left(1 + \frac{1}{\{y'(x_0, y_0)\}^2}\right)$$

$$\{x_0 y'(x_0, y_0) - y_0\}^2 = y_0^2\left(y'^2(x_0, y_0) + 1\right)$$

$$\{xy' - y\}^2 = y^2(y'^2 + 1)$$

$$x^2y'^2 - 2xyy' + \cancel{y^2} = y^2y'^2 + \cancel{y^2}$$

$$(x^2 - y^2)y'^2 - 2xyy' = 0$$

$$\{(x^2 - y^2)y' - 2xy\}y' = 0$$

$y' \neq 0$より、求める微分方程式は、

$$(x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$$

これをとく。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$u = \frac{y}{x}$とおくと、

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2u}{1 - u^2}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1 - u^2} - u = \frac{2u}{1 - u^2} - \frac{u - u^3}{1 - u^2} = \frac{u^3 + u}{-u^2 + 1}$$

$$\int \frac{-u^2 + 1}{u^3 + u}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \left\{-\frac{1}{3}\frac{3u^2 + 1}{u^3 + u} + \frac{\frac{4}{3}}{u^3 + u}\right\} du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \left\{-\frac{1}{3}\frac{3u^2 + 1}{u^3 + u} + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{u} + \frac{-u}{u^2 + 1}\right)\right\} du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\frac{1}{3}\log|u^3 + u| + \frac{4}{3}\log|u| - \frac{2}{3}\log|u^2 + 1| = \log|x| + C_1$$

$$\frac{1}{3}\log\left|\frac{u^4}{(u^3 + u)(u^2 + 1)^2}\right| = \log|x| + C_1$$

$$\frac{u^4}{(u^3+u)(u^2+1)^2} = C_1 x^3$$

$$\frac{u^3}{(u^2+1)^3} = C_1 x^3$$

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3}{\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)^3} = C_1 x^3$$

$$\frac{x^3 y^3}{(x^2+y^2)^3} = C_1 x^3$$

$$\frac{y^3}{(x^2+y^2)^3} = C_1$$

3C-6

(1) $z = y^{-4}$ のとき，

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = -4y^{-5}\frac{dy}{dx}$$

(2)
$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^5 Q(x)$$

$$y^{-5}y' + y^{-4}P(x) = Q(x)$$

$$-\frac{1}{4}\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} - 4P(x)z = -4Q(x)$$

(3) (2) より，$z = y^{-4}$ とおくと，与式は，

$$\frac{dz}{dx} - 4x\ z = -4\cdot\frac{1}{2}x$$

$$\frac{dz}{dx} - 4xz = -2x$$

これをとく。両辺に e^{-2x^2} をかけると，

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-2x^2}\cdot z\right) = -2xe^{-2x^2}$$

$$e^{-2x^2}\cdot z = \int -2xe^{-2x^2}dx = \frac{1}{2}e^{-2x^2} + C$$

$$\therefore z = \frac{1}{2} + Ce^{2x^2}$$

$$\therefore y^{-4} = \frac{1}{2} + Ce^{2x^2}$$

3C-7

5

(1) $f(0)=1$

また、fの導関数は、

$$f'(x) = 0 + \frac{d}{dx}\int_0^x (t-x) f(t)\, dt$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^x t f(t)\, dt - \frac{d}{dx}\left\{ x\int_0^x f(t)\, dt \right\}$$

$$= x f(x) - \left\{ \int_0^x f(t)\, dt + x f(x) \right\}$$

$$= -\int_0^x f(t)\, dt$$

より、

$$f'(0) = 0$$

(2) (1) より、

$$f''(x) = -f(x)$$

これをとくと、

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

$$\therefore f'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

条件より、

$$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 0 = C_2 \end{cases} \qquad \therefore f(x) = \cos x$$

3C-9

14

(1) $y = e^{px}$ とおくと,

$$y' = pe^{px}$$
$$y'' = p^2 e^{px}$$

これを与式に代入,

$$xp^2 e^{px} - (x+1)pe^{px} + e^{px} = 0$$
$$(p^2 - p)xe^{px} + (-p+1)e^{px} = 0$$

より, 次をみたす。

$$\begin{cases} p(p-1) = 0 \\ -p+1 = 0 \end{cases} \quad \therefore p = 1$$

$$\therefore y = e^x$$

(2) $y = e^x u$ とおくと,

$$y' = e^x u + e^x u'$$
$$y'' = e^x u + e^x u' + e^x u' + e^x u''$$
$$= (u'' + 2u' + u)e^x$$

これらを (A) に代入,

$$x(u''+2u'+u)\cancel{e^x} - (x+1)(u'+u)\cancel{e^x} + u\cancel{e^x} = 2x^2 e^{\cancel{2}x}$$
$$x(u''+2u'+\cancel{u}) - (xu' + \cancel{xu} + u' + \cancel{u}) + \cancel{u} = 2x^2 e^x$$
$$xu'' + (x-1)u' = 2x^2 e^x$$

$u' = p$ とおくと,

$$xp' + (x-1)p = 2x^2 e^x$$
$$p' + \left(1 - \frac{1}{x}\right)p = 2xe^x \quad \cdots ①$$

(3) ①をとく。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}e^x p\right) = 2e^{2x}$$

$$\frac{1}{x}e^x p = \int 2e^{2x}\,dx = e^{2x} + C_1 \quad (\forall C_1 \in \mathbb{R})$$

$$\therefore p = xe^{-x}(e^{2x} + C_1)$$
$$= x(e^x + C_1 e^{-x})$$

より,

$$\frac{du}{dx} = x(e^x + C_1 e^{-x})$$

$$\begin{array}{ccc} x & e^x - Ce^{-x} & + \\ 1 & e^x + Ce^{-x} & - \end{array}$$

$$u = \int x(e^x + Ce^{-x})\,dx = x(e^x - C_1 e^{-x}) - (e^x + C_1 e^{-x}) + C_2$$
$$= (x-1)e^x - C_1(x+1)e^{-x} + C_2$$

$$\therefore y = \{(x-1)e^x - C_1(x+1)e^{-x} + C_2\}e^x$$

$$= (x-1)e^{2x} + C_2 e^x - C_1(x+1)$$

3C-11

18

(1) $Y - y = f'(x,y)(X - x)$

$\therefore Y = f'(x,y)X - f'(x,y)x + y$

(2) (1)の式において $X=0$ なので,

$Y = -f'(x,y)x + y$

$\therefore (0,\ -f'(x,y)x + y)$

(3) NP, ON の長さを l_P, l_O とおくと,

$$l_P^2 = x^2 + \{-f'(x,y)x + y - y\}^2$$

$$= x^2 + \{f'(x,y)x\}^2 = x^2(1 + \{f'(x,y)\}^2)$$

$$l_O^2 = \{-f'(x,y)x + y\}^2$$

$$= \{f'(x,y)\}^2 x^2 - 2f'(x,y)xy + y^2$$

より, 次をみたす。

$$l_P^2 = l_O^2$$

$$x^2(1 + \cancel{\{f'(x,y)\}^2}) = \cancel{\{f'(x,y)\}^2 x^2} - 2f'(x,y)xy + y^2$$

$$2f'(x,y)xy = -x^2 + y^2$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \quad \cdots ①$$

$$\frac{-1+z^2}{2z} \sim \frac{2z^2}{2z}$$

(4) $z = \frac{y}{x}$ とおくと,

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$$

これらを①に代入

$$x\frac{dz}{dx} + z = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{z} + z\right)$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{z} - z\right) = -\frac{1}{2}\frac{1+z^2}{z}$$

$$\int \frac{z}{1+z^2}\,dz = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\log|1+z^2| = -\frac{1}{2}\log|x| + C \quad (\forall C \in \mathbb{R})$$

$$\therefore 1 + z^2 = \frac{C}{x}$$

(6) $z = \frac{y}{x}$ より,

$$x^2 + y^2 = Cx$$

$$\therefore \left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^2$$

$$\therefore (x - c)^2 + y^2 = c^2$$

3C-13

25

(1) $t=\sqrt{1-y^2}$ とおくと、

$$\frac{dt}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}, \quad y = \sqrt{1-t^2}$$

より、

$$\int \frac{1}{y\sqrt{1-y^2}}dy = \int -\frac{1}{y^2}dt = \int -\frac{1}{1-t^2}dt$$

$$= \int \frac{1}{2}\left\{\frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t-1}\right\}dt = \frac{1}{2}\left\{-\log|t+1| + \log|t-1|\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{1-y^2}-1}{\sqrt{1-y^2}+1}\right|$$

(2)

$$\int p\,dp = \int (y-2y^3)\,dy$$

$$\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^4 + C_1$$

$$p^2 = y^2 - y^4 + C_1$$

$$\therefore p = \sqrt{y^2-y^4+C_1}$$

$p(0)=0$ より、$C_1 = 0$

$$\therefore p = y\sqrt{1-y^2}$$

(3) $y'=p$ とおくと、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

より、

$$p\frac{dp}{dy} = y-2y^3$$

$$\therefore p = \sqrt{y^2-y^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2-y^4}$$

$$\int \frac{1}{y\sqrt{1-y^2}}dy = \int dx$$

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{1-y^2}-1}{\sqrt{1-y^2}+1}\right| = x + C_2 \quad (\forall C_2 \in \mathbb{R})$$

$x \to 0$ で $y=1$ より、

$0 = 0 + C_2$ $\therefore C_2$

$$\therefore \log\left|\frac{\sqrt{1-y^2}-1}{\sqrt{1-y^2}+1}\right| = 2x$$

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{(\sqrt{1-y^2}-1)^2}{1-y^2-1}\right| = \frac{1}{2}\log\left|\left(\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\right)^2\right| = \log\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = e^x$$

$$(1-ye^x)^2 = 1-y^2$$

$$\cancel{1} - 2ye^x + y^2e^{2x} = \cancel{1} - y^2$$

$$y\{(e^{2x}+1)y - 2e^x\} = 0$$

$$\therefore y = \frac{2e^x}{e^{2x}+1}$$

3C-14

6

(1) $y' + y = xy^3$

$-2y'y^{-3} - 2y^{-2} = -2x$

$u = y^{-2}$ とおくと,

$u' - 2u = -2x$

これをとく。両辺に e^{-2x} をかけると,

$x \quad -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$1 \quad -\frac{1}{4}e^{-2x}$

$$\frac{d}{dx}\{ue^{-2x}\} = -2xe^{-2x}$$

$$ue^{-2x} = \int xe^{-2x}dx = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x} + C$$

$$\therefore u = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

$$\therefore y^{-2} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

(2) $(\cos y - y\cos x)dx - (\sin x + x\sin y)dy = 0$

$P = \cos y - y\cos x$, $Q = -(\sin x + x\sin y)$ とおくと,

$P_y = -\sin y - \cos x$, $Q_x = -\cos x - \sin y$

$\therefore P_y = Q_x$

これより,与式は完全微分方程式。P,Q を各々 x,y で積分すると,

$$\int P\,dx = x\cos y - y\sin x + C_1(y)$$

$$\int Q\,dy = -y\sin x + x\cos y + C_2(x)$$

$$\therefore -y\sin x + x\cos y = C \quad (\forall C \in \mathbb{R})$$

3-15

$u = X(x)T(t)$ とおくと,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$X(x)\frac{dT(t)}{dt} + X(x)T(t)\cdot T(t)\frac{dX(x)}{dx} = 0$$

$$X(x)\{T'(t) + T^2(t)X'(x)\} = 0$$

$X(x) = 0$ は自明解なので,

$$T'(t) + T^2(t)X'(x) = 0$$

$$\therefore \frac{T'(t)}{T^2(t)} = -X'(x)$$

両辺の変数は独立であるが,常に等しいので,

これらは定数である。このことより,

$$\begin{cases} T'(t) = AT^2(t) & \cdots ① \\ X'(x) = -A & \cdots ② \end{cases} \quad (\forall A \in \mathbb{R})$$

①より,

$$\int \frac{1}{T^2}dT = A\int dt$$

$$\therefore -\frac{1}{T} = At \Rightarrow T = -\frac{1}{At}$$

②より,

$$\int dx = -A\int dt$$

$$\therefore X = -Ax$$

特解だから
積分定数はいらないはず

以上より,

$$u(x,t) = (-Ax)\cdot\left(-\frac{1}{At}\right) = \frac{x}{t}$$

Q 偏微変数分離のときかた,

① $u(x,t) = X(x)T(t)$ とおく

② $X(x), T(t)$ を各々一方の辺に集めて,

x, t が独立であることから,定数非同次の1階の連立にする。

3C-16

$2yy''-3(y')^2=y^2$

(1) $p=y'$ とおくと、

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

より、(*) は、

$$2y\cdot p\frac{dp}{dy}-3p^2=y^2$$

$\therefore f(y,p)=2yp$

(2) (**) は同次形。

$$\frac{dp}{dy}=\frac{1}{2}\left\{3\frac{p}{y}+\frac{y}{p}\right\}$$

$u=\frac{p}{y}$ とおくと、

$$y\frac{du}{dy}+u=\frac{1}{2}\left(3u+\frac{1}{u}\right)=\frac{3u^2+1}{2u}$$

$$y\frac{du}{dy}=\frac{3u^2+1}{2u}-u=\frac{3u^2+1}{2u}-\frac{2u^2}{2u}=\frac{u^2+1}{2u}$$

$$\int\frac{2u}{u^2+1}du=\int\frac{1}{y}dy$$

$$\log|u^2+1|=\log|y|+C_1 \quad (\forall C_1\in\mathbb{R})$$

$$\therefore u^2+1=C_1y$$

$$p^2+y^2=C_1y^3$$

初期条件より、$C_1=2$

$$\therefore p^2+y^2=2y^3$$

$p=\frac{dy}{dx}$ より、

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y^2(2y-1)$$

$$\frac{dy}{dx}=y\sqrt{2y-1}$$

$$\int\frac{1}{y\sqrt{2y-1}}dy=\int dx \quad \cdots ①$$

左辺について、$t=\sqrt{2y-1}$ とおくと、

$$\int\frac{1}{y\sqrt{2y-1}}dy=\int\frac{1}{\frac{1}{2}(t^2+1)\cdot t}t\,dt$$

$$=2\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\tan^{-1}t=2\tan^{-1}\sqrt{2y-1}$$

より ① は、

$$2\tan^{-1}\sqrt{2y-1}=x+C_2$$

初期条件より、

$$2\tan^{-1}1=C_2 \quad \therefore C_2=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \tan^{-1}\sqrt{2y-1}=x+\frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{2y-1}=\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$2y-1=\{\tan(\alpha+\frac{\pi}{2})\}^2$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}\{\tan^2(\alpha+\frac{\pi}{2})+1\}$$

3C-17

18

(1) $(x^2y-2y+4x^3y^3)\,dx+(8x^4y^2-x^3)\,dy=0$

$P=x^2y-2y+4x^3y^3$, $Q=8x^4y^2-x^3$ とおくと,

$P_y=x^2-2+12x^3y^2$, $Q_x=32x^3y^2-3x^2$

$P_y\neq Q_x$ より完全形でない。

(2) 与式の両辺に x^my^n をかけると,

$$Px^my^n\,dx+Qx^my^n\,dy=0$$

$P_2=Px^my^n$, $Q_2=Qx^my^n$ とおくと,

$$\frac{\partial P_2}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{x^{m+2}y^{n+1}-2x^my^{n+1}+4x^{m+3}y^{n+3}\right\}$$

$$=(n+1)x^{m+2}y^n-2(n+1)x^my^n+4(n+3)x^{m+3}y^{n+2}$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{8x^{m+4}y^{n+2}-x^{m+3}y^n\right\}$$

$$=8(m+4)x^{m+3}y^{n+2}-(m+3)x^{m+2}y^n$$

$\frac{\partial P_2}{\partial y}=\frac{\partial Q_2}{\partial x}$ をみたせばよいので,

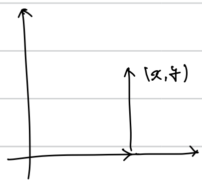
$$\begin{cases} n+1=-(m+3) \\ n+1=0 \\ n+3=2(m+4) \end{cases}$$

$\therefore n=-1,\ m=-3$

(3) $P\cdot x^{-3}y^{-1}\,dx+Qx^{-3}y^{-1}\,dy=0$

$(x^{-1}-2x^{-3}+4y^2)\,dx+(8xy-y^{-1})\,dy=0$

より,



$$\int(x^{-1}-2x^{-3}+4y^2)\,dx=\log|x|+x^{-2}+4xy^2+C_1(y)$$

$$\int(8xy-y^{-1})\,dy=4xy^2-\log|y|+C_2(x)$$

以上より,

$$\log|x|-\log|y|+x^{-2}+4xy^2=C.$$

3C-18

(1) $\psi = A(x)B(t)$ とおくと, ①は,

$$A(x)\frac{d^2B(t)}{dt^2} = C^2B(t)\frac{d^2A(x)}{dx^2}$$

$A(x)\neq 0, B(t)\neq 0$ と移と,

$$\frac{1}{C^2B}\frac{d^2B}{dt^2} = \frac{1}{A}\frac{d^2A}{dx^2}$$

(2) ④より,

$$A(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

⑤より,

$$B(t) = C_1'\cos(c\sqrt{\lambda}t) + C_2'\sin(c\sqrt{\lambda}t)$$

(3) $\psi = A(x)B(t)$ より,

$$\psi(x,t) = \left(C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x\right)\left(C_1'\cos(c\sqrt{\lambda}t) + C_2'\sin(c\sqrt{\lambda}t)\right)$$

$$= C_1C_1'\cos\sqrt{\lambda}x\cos(c\sqrt{\lambda}t) + C_1C_2'\cos\sqrt{\lambda}x\sin(c\sqrt{\lambda}t)$$

境界条件は $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$ であり,

t は free なので, $x=0, L$ において, $A(x)$ が 0 であるということ。

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2\sin\sqrt{\lambda}L = 0 \end{cases}$$

ここで, $\psi\neq 0$ なので, $C_2\neq 0$

$$\therefore \sqrt{\lambda}L = n\pi$$

$$\therefore \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Re = 1

3c - 15

$u = X(x)T(t)$ とおくと,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$X\frac{dT}{dt} + XT^2\frac{dX}{dx} = 0$$

$X \neq 0$ より,

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{T^2}\frac{dT}{dt}$$

x, t は独立変数なので, 上式より,

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dx} = C & \cdots ① \\ -\dfrac{1}{T^2}\dfrac{dT}{dt} = C & \cdots ② \end{cases} \quad (C\text{は定数})$$

①をとくと,

$$X = Cx$$

②をとくと,

$$\frac{1}{T} = Ct \iff T = \frac{1}{Ct}$$

以上より,

$$u = XT = Cx \cdot \frac{1}{Ct} = \frac{x}{t}$$