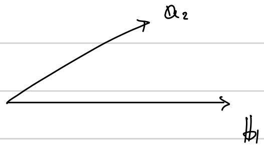
3/20

5B - 1 　　12

$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$ とおく。

$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - k\mathbf{b}_1$ とおくと、$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = 0$ であればよいので、



$$0 = (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) - k(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)$$

$$\therefore \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}\mathbf{b}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) = 3$

$(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) = 6$

また、$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - k_1'\mathbf{b}_1 - k_2'\mathbf{b}_2$ とおくと、

$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3) = 0$, $(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = 0$

をみたせばよいので、

$$0 = (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3) - k_1'(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)$$

$$0 = (\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3) - k_2'(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)$$

$(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3) = -1$

$(\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3) = 4$

$(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2) = 2$

より、

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}\mathbf{b}_1 - \frac{(\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3)}{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)}\mathbf{b}_2$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

以上より、正規化すると、

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{b}_3}{|\mathbf{b}_3|} = \frac{1}{\frac{1}{3}(\sqrt{6})} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5B-2

5

(1) $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) \in U$ は次をみたす。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad - x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \boldsymbol{x} = x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -x_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \dim U = 2$

(2) (1)より, Uの基底の1組は,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

であり, (1)より, Uの任意のベクトルが上で表せているので, Uの基底といえる。

5B-3

(1) $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ とおくと,

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}x_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}x_4$$

列基本変形により1次関係は変化しないので,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\times(-1)$ $\times(-1)$ $\times(-1)$ $\times(-1)$

したがって $\mathrm{Im} f$ の基底は,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(2) (1)と同様に $\boldsymbol{x}$ を定める。

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

上をとけばよい, 係数行列を考えると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1),\ \times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1),\ \times 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって,

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 + x_4 = 0 \\ \quad x_2 + x_3 \qquad = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \boldsymbol{x} = x_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

5B-4

10

(1) 求める行列をAとおくと、次をみたす。

$$\begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $x = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$ とおく。

(i) Ker f

Tで移した先が 0 となるので、

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x = 0$$

上をとけばよい。係数行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって、

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore x = -x_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

より、基底は

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \therefore \dim \mathrm{Ker}(T) = 1$$

(ii) Im T

Tで x をうつすと、

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} x_3$$

より、列ベクトルの1次関係を考えればよい。

列基本変形によりこれは変化しないので、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって基底は、

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \therefore \dim(\mathrm{Im}\,T) = 2$$

5B-5

部分空間となるためには，$x \in U$ の和とスカラー倍が U の元となることを示せばよい。

$0 \in U$ も言う。

$$x = {}^t(x_1\ x_2\ x_3),\quad y = {}^t(y_1\ y_2\ y_3) \quad \in U$$

とおくと，

$$\begin{cases} a x_1 + x_2 + x_3 = b & \cdots ① \\ a y_1 + y_2 + y_3 = b & \cdots ② \end{cases}$$

が成立。

(i) 和について，

$$x + y = {}^t(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3)$$

これが U の元であるとすると次をみたす。

$$a(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = b$$

①, ② より，

$$2b = b \quad \therefore b = 0$$

(ii) スカラー倍について，

$$kx = {}^t(kx_1,\ kx_2,\ kx_3) \quad (k \in \mathbb{R})$$

これが U の元であるとすると，次をみたす。

$$a(kx_1) + kx_2 + kx_3 = b$$

① より，

$$kb = b \quad \therefore b = 0$$

以上より，a は任意であり $b = 0$ のとき，U は $\mathbb{R}^2$ の部分空間となる。

5B-6

(1) 与えられたベクトルが1次独立であることを示せばよい。

$$k_1(a+b+c)+k_2(a+b)+k_3 a = 0 \quad \cdots ①$$

とおくと、

$$(k_1+k_2+k_3)a+(k_1+k_2)b+k_1 c = 0$$

a, b, cは1次独立なので、次をみたす。

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3 = 0 \\ k_1+k_2 = 0 \\ k_1 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

したがって①について自明解しか持たないので、

与えられたベクトルの組は1次独立である。

(2) ベクトルの組をfでうつすと、

$$f(a+b+c) = \cancel{-a}-c\cancel{+a}+a+b+2c = a+b+c$$

$$f(a+b) = -a-c+a = -c$$

$$f(a) = -a-c$$

であり、表現行列Aの定義より、

$$\begin{pmatrix} f(a+b+c) & f(a+b) & f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} A$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

① {〜}に関する表現行列

⟺ 変換の前後で同一の基底を使う。

特に同じ空間へ移す変換に注意。

$$\begin{pmatrix} f(a+b+c) & f(a+b) & f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c, & a+b, & a \end{pmatrix} A$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5B-7　　　20

(1) φは変換なので、

$$\varphi(e_1+e_2)=\begin{pmatrix}a\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2)=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_3)=\begin{pmatrix}b\\0\\c\end{pmatrix}$$

であり、表現行列の定義より、求めるものをAとおくと

$$\begin{pmatrix}\varphi(e_1+e_2) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3)\end{pmatrix}=(e_1+e_2,\ e_2,\ e_3)A$$

$$\begin{pmatrix}a & 0 & b\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}A$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0 & b\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}a & 0 & b\\ -a+2 & 2 & -b\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}}_{A}$$

(2) 任意の基底を次のようにとる.

$$\{x\ y\ z\}$$

ただし、

$$x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$$
$$y=y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3$$
$$z=z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3$$

これらをφで移すと、

$$\varphi(x)={}^t(ax_1+bx_3,\ 2x_2,\ cx_3)$$
$$\varphi(y)={}^t(ay_1+by_3,\ 2y_2,\ cy_3)$$
$$\varphi(z)={}^t(az_1+bz_3,\ 2z_2,\ cz_3)$$

より、

$$\begin{pmatrix}ax_1+bx_3 & ay_1+by_3 & az_1+bz_3\\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2\\ cx_3 & cy_3 & cz_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0 & b\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}ax_1 & 2y_1 & bx_1+cz_1\\ ax_2 & 2y_2 & 2bx_2+cz_2\\ ax_3 & 2y_3 & bx_3+cz_3\end{pmatrix}$$

これが等式であるためには、

$\underline{a=c=2 \text{ かつ } b=0}_{A}$

@基底のとり方によらず同じ表現行列をもつ変換は
恒等変換のスカラー倍のみである?

5B-8

(1)

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \times(-1) \\ \times(-1) \end{array}$$

$\times(-1)$

$$= (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+3)(x-1)^3$$

(2) $\det A \neq 0$ のとき、線形独立なので、

Case(i) $x \neq -3, 1$ 線形独立

Case(ii) $x = -3$

列基本変形により1次関係は変化しないので、

$$(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{d}) = \underset{\times 3\quad \times(-1)\quad \times(-1)}{\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -4 & 1 \\ -8 & 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to \underset{\times 1\qquad \times(-1)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}}$$

$$\to \underset{\times(-1)\quad \times 1}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

よって部分空間の次元は3。

Case(iii) $x = 1$

$$(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{d}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & & O & \\ 1 & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

∴ 次元 1