No	チェック項目	チェック
1		□
2		□
3		□
4	解答者の○×の数の制限	✓
5		△
6	$\sum k^2 6^{k-1}$ の変形	✓
		□
		□
		□
		□
		□
		□
		□
		□
		□
		□
		□
		□
		□
		□

7B-1

(1) 並べ方の総数は,

$$\frac{7!}{2!5!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21 \text{通り}$$

白が5つ連続する並べ方は,

$$\frac{3!}{2!1!} = 3 \text{通り}.$$

したがって求める確率は,

$$\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

(2) 余事象を考える。2つの赤がとなり合う場合は,

$$\frac{6!}{5!1!} = 6 \text{通り}。$$

より,求める確率は,

$$1 - \frac{6}{21} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

7B-2

20

各人がかつ確率をP, Q, Rとすると,

Case(i) フィンランドがかつ

$$P = \frac{a}{a+b} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^3 \cdot P$$

$$(a+b)^3 P = a(a+b)^2 + b^3 P$$

$$(a^3+3a^2b+3ab^2)P = a(a+b)^2$$

$$\therefore P = \frac{(a+b)^2}{a^2+3ab+3b^2}$$

Case(ii) スウェーデン人がかつ

はじめフィンランド人がまけた上で

かつ確率 Q' は,

$$Q' = P = \frac{(a+b)^2}{a^2+3ab+3b^2}$$

$$\therefore Q = \frac{b}{a+b} Q' = \frac{b(a+b)}{a^2+3ab+3b^2}$$

Case(iii) ノルウェー人がかつ

はじめフィンランド,スウェーデンがまけた上で

かつ確率 R' は,

$$R' = P = \frac{a+b}{a+2b}$$

$$\therefore R = \frac{b^2}{(a+b)^2} R' = \frac{b^2}{a^2+3ab+3b^2}$$

~~Ano~~ Ans

(i) Fが3n+1回目でかつ確率は,

$$\left(\frac{b}{a+b}\right)^{3n}\left(\frac{a}{a+b}\right)$$

より,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a+b}\right)^{3n}\left(\frac{a}{a+b}\right) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{b}{a+b}\right)^3}$$

$$= \frac{a}{\cancel{a+b}} \cdot \frac{(a+b)^{\cancel{3}2}}{(a+b)^3 - b^3} = \frac{(a+b)^2}{a^2+3ab+3b^2}$$

7B-4

(1) 1問があたる確率は $\frac{1}{2}$ なので,

9

$$P_0 = P_6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

$$P_1 = P_5 = {}_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

$$P_2 = P_4 = {}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64}$$

$$P_3 = {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

(2)

(3) $$P_k = {}_{2N}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^{2N}$$

問 ○○○×××

◎ 解答者は○,×を3回ずつしか書けない。

(1) 問の答えは初めから3問が○, 残りが×とすると,

Case(i) 前3問に(○,○,○)の組みあわせをえらぶ

$$P_6 = \frac{1}{{}_6C_3} = \frac{1}{20}$$

Case(iii)(○,○,×)の組みあわせをえらぶ

$$P_4 = \frac{{}_3C_2\times{}_3C_1}{{}_6C_3} = \frac{9}{20}$$

Case(ii)(○,×,×)

$$P_2 = \frac{9}{20}$$

Case(iv)(×,×,×)

$$P_0 = \frac{1}{20}$$

また,

$$P_1 = P_3 = P_5 = 0$$

(2) ○……○×…×

解答が先頭から○がNコ×がNコとすると,

初めNコの内, ○をxコ, ×をN−xコ選んだということなので, 残っている×の数はxコなので,

$$x = \frac{k}{2}$$

(3) Case(i) $k = 2n$

$\frac{k}{2}$ ∵ $k = x + \frac{k}{2} = 2x$

$$P_k = \frac{{}_NC_k\,{}_NC_{N-k}}{{}_{2N}C_N} = \frac{\dfrac{N!}{k!(N-k)!}\times 2}{\dfrac{(2N)!}{N!\,N!}} = 2\,\frac{(N!)^3}{k!(N-k)!(2N)!}$$

7B-5　　13

(1) 偶数の目が出る確率は $\frac{1}{2}$ なので,　　○ … × × ○

反復試行を考えると,

$$P_n(5) = {}_{n-1}C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4 \cdot 3 \cdot 2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$$

(2)

$$P_n(k) = {}_{n-1}C_{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(3) $P_n(k)$ は 凸 関数なので,

$P_{n+1}(k) / P_n(k)$ が 1をまたぐ点を調べる。

$$\frac{P_{n+1}(k)}{P_n(k)} = \frac{\dfrac{n\cancel{!}}{\cancel{(k-1)!}\,(n+1-\cancel{k)!}}}{\dfrac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(k-1)!}\,\cancel{(n-k)!}}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2(n-k+1)}$$

より,

$$\frac{n}{2(n-k+1)} = 1$$

$$n = 2n - 2k + 2$$

$$n = 2k - 2$$

したがって,

$$P_1 < P_2 < \cdots < P_{2k-2} = P_{2k-1} > P_{2k} > \cdots$$

$$\therefore\ 2k-2,\ 2k-1$$

7B-6

(1) n枚を1枚ずつ投げ, 1枚だけが裏or表の確率と同じなので,

$$2\times\left\{{}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} = 2n\cdot\frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

A

(2) (1)より, 丁度1枚である確率をp, そうでない確率をqとおくと,

$$p = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$q = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}$$

より, 求める確率は,

$$q^{k-1}\times p = \frac{n}{2^{n-1}}\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}$$

A

(3) k回以内に終了するので, 1〜kの和を考えると,

$$\sum_{l=1}^{k} p q^{l-1} = \cancel{p}\,\frac{1-q^k}{\cancel{1-q}} = 1-\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}\right)^k$$

(4) 出る回数を変数Xとおくと,

$$E(X) = \sum_{l=1}^{\infty} l\,p\,q^{l-1} = p\sum_{l=1}^{\infty}\frac{d}{dq}q^l$$

$$= p\frac{d}{dq}\left\{\frac{q}{1-q}\right\} = \cancel{p}\,\frac{1}{(1-q)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{n}{2^{n-1}}}$$

$$= \frac{2^{n-1}}{n}$$

また,

$$E(X^2) = \sum_{l=1}^{\infty} l^2 p\,q^{l-1} = p\sum_{l=1}^{\infty}\frac{d}{dq}\,l\,q^l$$

$$= p\sum_{l=1}^{\infty}\frac{d}{dq}\left\{q\frac{d}{dq}q^l\right\} = p\frac{d}{dq}\left\{q\frac{d}{dq}\sum_{l=1}^{\infty}q^l\right\}$$

$$= p\frac{d}{dq}\left\{q\frac{d}{dq}\frac{q}{1-q}\right\} = p\frac{d}{dq}\left\{q\,\frac{(1-\cancel{q})-\cancel{q(-1)}}{(1-q)^2}\right\}$$

$$= p\frac{d}{dq}\left\{\frac{q}{(1-q)^2}\right\} = \cancel{p}\cdot\left\{\frac{(1-q)^{\cancel{2}}+q\cdot 2\cancel{(1-q)}}{(1-q)^{\cancel{4}\,2}}\right\} = \frac{1+q}{p^2}$$

Q この変形大事
lをけすことを念頭におく。

より,

$$V(X) = E(X^2)-E(X)^2 = \frac{1+q}{p^2}-\frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{1-\frac{n}{2^{n-1}}}{\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^2}$$

$$= \frac{2^{n-1}-n}{n^2}\,2^{n-1}$$

Re=1 3/31

7B - 4

(1) ○○○×××　　　　○ ○ ○ × × ×

のように初めの3問が○, 残りが×が正解と考える。

Case(i) $k=6$

6つの記号から○を3つ選ぶので,

$$P_6 = \frac{{}_3C_3}{{}_6C_3} = \frac{3\cdot 2}{6\cdot 5\cdot 4} = \frac{1}{20}$$

Case(ii) $k=4$

$$P_4 = \frac{{}_3C_2 \times {}_3C_1}{{}_6C_3} = \frac{3\cdot 3}{5\cdot 4} = \frac{9}{20}$$

Case(iii) $k=2$

$$P_2 = \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_2}{{}_6C_3} = \frac{9}{5\cdot 4} = \frac{9}{20}$$

Case(iv) $k=0$

$$P_0 = \frac{1}{20}$$

Case(V) $k = 1, 3, 5$

$$P_k = 0$$

(2) $\underbrace{\bigcirc\bigcirc \cdots \bigcirc\bigcirc}_{N}\ \underbrace{\times\times \cdots \times\times}_{N}$

初めのN問を○, 残りを×が正解とすると,

x問正解したとき, $N-x$の○を使わなくてはならない。

残りは全て×なので, N問の内, $N-x$問は間違え,

$N-(N-x) = x$ 問は正解となる。このことより,

$$x = y$$

(3) Case(i) kが偶数　　前半だけ考えているので $\frac{k}{2}$.

$$P_k = \frac{{}_N C_{\cancel{k}\,\frac{k}{2}}\ {}_N C_{N-\cancel{k}\,\frac{k}{2}}}{{}_{2N}C_N} = \frac{\frac{N!}{k!(N-k)!}\ \frac{N!}{(N-k)!\,k!}}{\frac{(2N)!}{N!\ N!}} = \frac{(N!)^4}{(2N)!\{k!(N-k)!\}^2}$$

Case(ii) kが奇数.

$$P_k = 0$$