No	チェック項目	チェック
1		☐
2	サイの目ではなく各点に存在することを考える。 → 煩雑になりそうだったら、別の考え方をしてみる。	✓
3	問の意味「丁度nコ」	△
4		☐
5	「ゲーム全体」の期待値と「ある試行」の期待値を区別する。 → ある1つの試行に対しても期待値が定義できる ex) Mathemon	✓
6	ムリ	☐
		☐
		☐
		☐
		☐
		☐
		☐
		☐
		☐
		☐
		☐
		☐
		☐
		☐
		☐

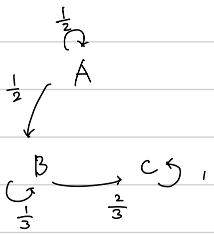
3/27

11

7C-1

(1) 2つともBに移動するので、

$$P_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



(2) $P_2 = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

(3) 1つの玉について、それがCに無い確率は余事象より、

$$1 - \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

したがって、

$$P_3 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

(C,C)
(B,C)

(A,A)
(A,B)
(A,C)

(4) 1つの玉について、それがBにあるとき、次の場合がある。

(i) A → A → B

(ii) A → B → B

したがって、その確率は、

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

以上より、

$$P_4 = \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = \cancel{2} \times \frac{7}{\cancel{12}_{6}} \times \frac{5}{12}$$

$$= \frac{35}{72}$$

3/28

Q

7C - 2

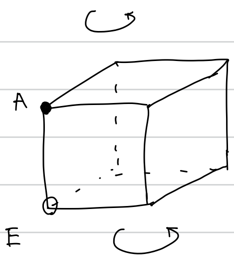
40

(1) 2度サイを振ったとき、目の和が

2, 6, 10

のいずれかであればよい。このような目の出方は9通りなので、

$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ A



B : 1, 2

W : 3, 4

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

(2) $\sqrt{2}a$ であるとき、出た目の和の差が、

1, 3, 5, 7, 9, 11

のいずれかであればよい。これをみたす出目の和のペアは、

(2, 3), (2, 5), (2, 7), (2, 9), (2, 11)

(3, 4), (3, 6), (3, 8), (3, 10), (3, 12)

○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○

(6, 7), (6, 9), (6, 11)

より、

$(2+4+6+4+2)+2\times(3+5+5+3+1)$ +…

(3)(i) 長さが $\sqrt{3}a$

黒と白が対角線上にある。

このとき、1,2回目と3,4回目の目の和の差が

2, 6

のいずれかである。このような目の和の組み合わせは、

(2, 4), (2, 8), (3, 5), (3, 9)

(4, 6), (4, 10), (5, 7), (5, 11) 14通り

(6, 8), (6, 12), (7, 9), (8, 10)

(9, 11), (10, 12)

したがって求める確率は

$$\frac{14\times2}{{}_{36}C_2} = \frac{2^2\times7}{\frac{36\cdot35}{2}} = \frac{2^{\cancel{2}}\times\cancel{7}}{\cancel{2}\times3^2\times5\times\cancel{7}} = \frac{2}{45}$$

(ii) 長さが a

$27+14=41$

この確率は余事象より、

$$\frac{{}_{36}C_2-(27\times2+14\times2)}{{}_{36}C_2} = \frac{\cancel{2}\times3^2\times5\times7-\cancel{2}\times41}{\cancel{2}\times3^2\times5\times7}$$

$$= \frac{274}{3^2\times5\times7}$$

Q サイの目を考えると煩雑

→ 各点に存在する確率を考える。

18

26

A, E : $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

B, F : $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

C, G : $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

D, H : $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

以上より、

Case (i) $\sqrt{2}a$

長さが $\sqrt{2}a$ である点のペアは、

(A, F), (A, H), (B, E), (B, G)

(C, F), (C, H), (D, G), (D, E)

より、

$$\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{9}+\frac{5}{18}\right)+\frac{2}{9}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{9}+\frac{5}{18}\right)+\frac{5}{18}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{5}{36}$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{5}{36} = \frac{9+4+5}{36} = \frac{1}{2}$$

Case (ii) $\sqrt{3}a$

(A, G), (B, H), (C, E), (D, F)

より

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{9}\times\frac{5}{18}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{5}{18}\times\frac{2}{9}$$

$$= \frac{1}{8}+\frac{10}{81} = \frac{161}{648}$$

Case (iii) a

余事象より、

$$1-\frac{1}{2}-\frac{161}{648} = \frac{648-324-161}{648} = \frac{163}{648}$$

以上より、

$$\frac{324\sqrt{2}a+163a+161\sqrt{3}a}{648}$$

7C-3　　　　14

△ (1) 1つ前と同じ数字となる確率は x なので，

$$P(n) = x^n \quad x^{n-1}(1-x)$$

「丁度 n 回」なので，$n+1$ 回目は異なる数字

△ (2)

$$L = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)P(n) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{1-x}\right\} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (1-x) = \frac{1}{1-x}$$

◯ (3)

$$Q_{j+1} = xQ_j + (1-x)(1-Q_j)$$

$$= (2x-1)Q_j + 1 - x$$

◯ (4) (3)より，

$$Q_{j+1} - \frac{1}{2} = (2x-1)\left\{Q_j - \frac{1}{2}\right\}$$

$$= (2x-1)^j\left(Q_1 - \frac{1}{2}\right)$$

題意より，$Q_1 = 1$ なので，

$$Q_{j+1} - \frac{1}{2} = (2x-1)^j \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore Q_j = \frac{1}{2}\left\{1 + (2x-1)^{j-1}\right\}$$

7C-4

28

(1)

(a)

$$E(X)=\sum_{k=1}^{a}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{a}k\{P(X\geq k)-P(X\geq k+1)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{a}kP(X\geq k)-\sum_{k=1}^{a+1}(k-1)P(X\geq k)$$

$P(X\geq a+1)=0$ より,

$$E(X)=\sum_{k=1}^{a}P(X\geq k)$$

■

(b)

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{a}k^2P(X=k)=\sum_{k=1}^{a}k^2\{P(X\geq k)-P(X\geq k+1)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{a}k^2P(X\geq k)-\sum_{k=1}^{a+1}(k-1)^2P(X\geq k)$$

$$=\sum_{k=1}^{a}\{k^2P(X\geq k)-(k^2-2k+1)P(X\geq k)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{a}(2k-1)P(X\geq k)$$

■

AnoSol

(a)

$$E(X)=\sum_{k=1}^{a}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{a}k\{P(X\geq k)-P(X\geq k+1)\}$$

$$=1\cdot\{P(X\geq 1)-P(X\geq 2)\}+2\{P(X\geq 2)-P(X\geq 3)\}+\cdots$$

$$=P(X\geq 1)+P(X\geq 2)+\cdots+P(X\geq a)$$

$$=\sum_{k=1}^{a}P(X\geq k)$$

(b)

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{a}k^2\{P(X\geq k)-P(X\geq k+1)\}$$

$$=1\cdot\{P(X\geq 1)-P(X\geq 2)\}+4\{P(X\geq 2)-P(X\geq 3)\}+\cdots$$

$$=P(X\geq 1)+(4-1)P(X\geq 2)+\cdots+(2a-1)P(X\geq a)$$

$$=\sum_{k=1}^{a}(2k-1)P(X\geq k)$$

(2)

(a) aコの中から$k-1$コの赤玉をえらぶ確率を考えればよいので,

$$\frac{{}_{a-1}C_{k-1}}{{}_{a}C_{k-1}}=\frac{\frac{(a-1)!}{(k-1)!(a-k)!}}{\frac{a!}{(k-1)!(a-k+1)!}}=\frac{a-k+1}{a}$$

(b) $X=1,\cdots,k,\cdots,a$ と考えると,

$$E(X)=\sum_{k=1}^{a}P(X\geq k)=\sum_{k=1}^{a}\frac{a-k+1}{a}$$

$$=\frac{1}{a}\left\{(a+1)a-\frac{1}{2}a(a+1)\right\}$$

$$=a+1-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}=\frac{a+1}{2}$$

(c)

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{a}(2k-1)P(X\geq k)=\sum_{k=1}^{a}(2k-1)\frac{a-k+1}{a}$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a}\{-2k^2+(2a+3)k-a-1\}$$

$$=\frac{1}{a}\left\{-2\cdot\frac{1}{6}a(a+1)(2a+1)+(2a+3)\cdot\frac{1}{2}a(a+1)-a^2-a\right\}$$

$$=\frac{1}{a}\left\{-\frac{1}{3}a(2a^2+3a+1)+\frac{1}{2}a(2a^2+5a+3)+a(-a-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\{-4a^2-6a-2+6a^2+15a+9-6a-6\}$$

$$=\frac{1}{6}(2a^2+3a+1)$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{(4a^2+6a+2)-(3a^2+6a+3)}{12}=\frac{a^2-1}{12}$$

7C-5

30

(1) 問より，$N = 10a+b$ なので，

$$10a+b = (a+b)^2$$
$$= a^2+2ab+b^2$$
$$a^2+2(b-5)a+b(b-1)=0$$

上式をaの方程式として解くと，

$$a = -(b-5) \pm \sqrt{(b-5)^2-b(b-1)}$$
$$= -b+5 \pm \sqrt{\cancel{b^2}-10b+25-\cancel{b^2}+b}$$
$$= -b+5 \pm \sqrt{25-9b}$$

したがって，

Case(i) $b=0$

$$a = 0+5\pm 5 = 10, 0$$

$\therefore a = 0$ (10は不適)

Case(ii) $b=1$

$$a = -1+5\pm 4 = 8, 0$$

$\therefore a = 0, 8$.

Case(iii) $b \geq 2$

根号ないが負となるので，実数解なし。

以上より，求める組み合わせは，

$(a,b) = (0,0), (0,1), (8,1)$

	$a>b$	$a<b$
Coin	$+1$	-1

(2)

(2-1) k枚持っていてかつとき，次の場合がある。

(i) k枚の状態から $a>b$で，最終的にかつ.

(ii) 〃 $a<b$, 〃

(iii) 〃 $a=b$ 〃

ここで，$a=b$のとき，コインが変化しないとおくと，

その確率は $\frac{1}{10}$，ここで，余事象を考えると，

$a>b$となる確率 : $\frac{45}{100} = \frac{9}{20}$

$a<b$ 〃 : $\frac{9}{20}$

したがって

$$P_k = \frac{45}{100}\times P_{k+1} + \frac{45}{100}P_{k-1} + \frac{1}{10}P_k$$
$$= \frac{9}{20}P_{k+1}+\frac{9}{20}P_{k-1}+\frac{1}{10}P_k$$

(2-2) (2-1)より

$$2P_k = P_{k+1}+P_{k-1}$$

ここで

$$P_k = (Ak+B)\cdot 1^k$$

$P_0 = 0$, $P_{10} = 1$とおくと，

$$\begin{cases} 0 = B \\ 1 = 10A+B \end{cases}$$

$\therefore A = \frac{1}{10}$

$$\therefore P_k = \frac{k}{10}$$

(2-3) (2-2)より、期待値Eは、

$$E = \sum_{k=1}^{9} (10-k)^2 P_k = \sum_{k=1}^{9} (k^2 - 20k + 100) \cdot \frac{k}{10}$$

$$= \frac{1}{10} \left\{ \left(\frac{1}{2} \cdot 9 (9+1) \right)^2 - \cancel{26} \cdot \frac{1}{6} \cdot 9 (9+1)(18+1) + 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \right\}$$

$$= \frac{5 \cdot 9}{10} \Big\{ 45 -$$

Q 左は「ゲーム」の期待値、

求めるべきはある k での期待値

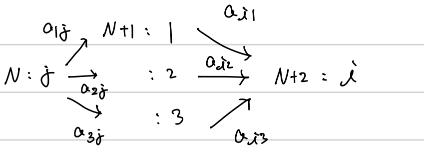
$k = k$ での期待値は、

$$E_k = (10-k)^2 \frac{k}{10}$$

これを比較すればよい。

7C-6

(1) 遷移図は以下



$N \quad N+1$

$i \quad j \quad : a_{ij}$

したがって, N番目がjをえらんだ上での確率なので,

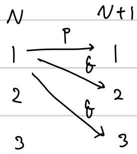
$$P_i(N+2) = a_{1j}a_{i1} + a_{2j}a_{i2} + a_{3j}a_{i3}$$

(2) 次の場合ごとの確率は,

(i) $1 \to 1 \ : \ p$

(ii) $1 \to 2 \ : \ q$

(iii) $1 \to 3 \ : \ q$



以上より,

$$p + 2q = 1$$

(3) (2) より,

$$A = \begin{pmatrix} p & q & q \\ q & p & q \\ q & q & p \end{pmatrix}$$

であり,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3F - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4り,

なので,

$$A = pE + q(3F - E) = (p-q)E + 3qF = (1-3q)E + 3qF$$

ここで

$$FA = \frac{1}{3}(p+2q)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = F$$

より,

$$A^2 = (1-3q)A + 3qF = (1-3q)^2E + 3q(1-3q)F + 3qF$$
$$= (1-3q)\{(1-3q)E + 6qF\}$$

$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}($

$= \frac{1}{3}(\ p+2Q$

(4) (3) より,

$$A^3 = (1-3q)\{(1-3q)A + 6qF\}$$
$$= (1-3q)\{(1-3q)^2E + 3q(1-3q)F + 6qF\}$$
$$= (1-3q)^2\{(1-3q)E +$$