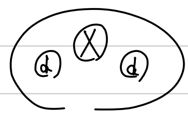
9/5

12

1

(1) 円順列を考える.
コレは区別があるとき.
ペンダントを一ヶ所に固定すると,

$2\times(d-2+g)!$ 通り



$d-2$　　g

$g+d-2$ヶ所 から gヶ所えらぶと考える.

$_{g+d-2}C_g$

(2) Case (i) $g \geq d-2-1$

$g-1$ヶ所から ダイヤを入れる所を選べばよい.

$_{g-1}C_{d-2}$ 通り

$g-1 < d-2$ のときは,

$_{g-1}C_{d-2}$ が 0 になるので,

場合わけしなくてよい.

2

(1) A について,
余事象を考える.
A でない確率は,

$\left(\frac{5}{6}\right)^n$

$\therefore P_A = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

B について,
B でない確率は,

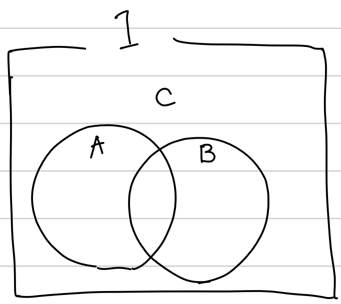
$\left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

「AもBもおきない」
=「3 or 5 がでる」

$\therefore P_B = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

C について,

$P_C = \left(\frac{5}{6}\right)^n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$　　$P_C = \left(\frac{1}{3}\right)^n$



(2) $P_2 = P_A + P_B - P_A\times P_B$　　$P(A\cup B) = 1 - P(C) =$

(3) $P_3 = P_A - P_A\times P_B$　　$P(A\cap\overline{B}) = P(A\cup B) - P(B)$

考え ok

(4) $P_A\times P_B$　　$P(A\cap B) = P(A\cup B) - P(A) - P(B)$

or

$= P(A) - P(A\cap\overline{B})$

③ 15

$M_n - m_n \geq 1$
⇔ 最大と最小の差が2以上

余事象を考える.
Case(i) $M_n = m_n$
全て同じ目がでるので, その確率は,
$\left(\frac{1}{6}\right)^n$ $\left(\frac{1}{6}\right)^n \times 6$

Case(ii) $M_n = m_n + 1$
1つ目のサイの目より, 2つ目のサイの目が
大きい場合, 小さい場合がある.
ただし, 1つ目が6であれば, 最大, 1であれば
最小にしかなり得ない.
コレだと一方のでる回数が
1回になってしまう.
したがってその確率は,
$$\frac{1}{6} \times {}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{6} \times {}_nC_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{6} \times {}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$
$$= \frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{n}{18}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$
$$= \frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{n}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{n}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(3+1)$$
$$= \frac{4}{9}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{2}{9}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$
これらの和をとり, 全確率からひくと,
$$1 - \left(\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{9}n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$
$$= 1 - \left(\left(\frac{1}{3^n} + \frac{2n}{9}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

書くにしてもこう.
$$\frac{2}{6} \times {}_nC_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{6}\,{}_nC_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$
$$= 2\left\{\frac{n}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n$$
1 or 2 がでる problemだから,
単に$\left(\frac{1}{3}\right)^n$

これだと1種しかでないときと, パターンが網羅されてない
$(m_n, M_n) = (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)$
$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} \times 5$$
$$1 - ⓧ$$

4

(1) 全て5以下である確率

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

全て4以下である確率

$$\left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

最大が5で,全て5以下の確率は,

$$P(X_n=5) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(2) $P(X_n=5)$ から 1がでる確率をひけばよいので,

$$P(X_n=5, Y_n=2) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

10

5, 4, 3, 2 のみがでればよい.
ただし, 5と2は必ずでる.

$$\left(\frac{4}{6}\right)^n - \underset{\text{5でない}}{\left(\frac{3}{6}\right)^n} - \underset{\text{2でない}}{\left(\frac{3}{6}\right)^n} + \underset{\text{2も5もでない}}{\left(\frac{2}{6}\right)^n}$$

5 サイの目が全て $i \sim j$ であればよい.
ただし, i, j がでない場合を除く.

13

Case(i) $i \neq j$

$$\left(\frac{j-i+1}{6}\right)^n - \left(\frac{j-i}{6}\right)^n - \left(\frac{j-i}{6}\right)^n + \left(\frac{j-i-1}{6}\right)^n$$

Case(ii) $i = j$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

以上より,

$$\left(\frac{j-i+1}{6}\right)^n - 2\left(\frac{j-i}{6}\right)^n + \left(\frac{j-i-1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

解答で足してないのは何故?

$\boxed{6}$

(1) kが最大値で,全てk以下の確率

$$P(X=k) = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n$$

22

(2) lが最小値で,全てl以上となる確率

$$P(Y=l) = \left(\frac{6-l+1}{6}\right)^n - \left(\frac{6-l}{6}\right)^n$$

$$= \left(\frac{7-l}{6}\right)^n - \left(\frac{6-l}{6}\right)^n$$

よリ,

$E[X]-E[Y]$

$$= \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\} - \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{7-l}{6}\right)^n - \left(\frac{6-l}{6}\right)^n\right\}$$

$$= \left[1\cdot\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^n - 0^n\right\} + 2\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} + \cdots + 6\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}\right]$$

$$- \left[1\cdot\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\} + \cdots + 6\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^n - 0^n\right\}\right]$$

OK

$$= -5\left(\frac{1}{6}\right)^n - 2\left\{\left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} + 2\left\{\left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n\right\} + 5\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}$$

$E[X]-E[Y]$

$$= \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\} - \sum_{l=1}^{6} l\left\{\left(\frac{7-l}{6}\right)^n - \left(\frac{6-l}{6}\right)^n\right\}$$

テレスコにもってく.

$$= \sum_{k=1}^{6}\left\{k\left(\frac{k}{6}\right)^n - (k-1)\left(\frac{k-1}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\} - \sum_{l=1}^{6}\left\{l\left(\frac{7-l}{6}\right)^n - (l+1)\left(\frac{6-l}{6}\right)^n + \left(\frac{6-l}{6}\right)^n\right\}$$

$$= \left[6\cdot 1^n - 0 - \left\{\left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{6}\right)^n + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}\right] - \left[1\cdot\left(\frac{6}{6}\right)^n - 0 + \left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{6}\right)^n + \cdots + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}\right]$$

$$= 5 - 2\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^n + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}$$

7

$_nS_k$は全ての分け方から、0のグループを含む場合を除けばよい。

1 2 3 4 5

$$_nS_k = k^n - k(k-1)$$

これより、

A B C 3×2

$$_{n+1}S_k = k^{n+1} - k(k-1)$$

$$_nS_{k-1} = (k-1)^n - (k-1)(k-2)$$

−4 −4 −4

$$k\,_nS_k = k^{n+1} - k^2(k-1)$$

A B C D 4×3

なので、

$$_nS_{k-1} + k\,_nS_k = (k-1)^n + k^{n+1} - (k-1)(k^2+k-2)$$

$$_{n+1}S_k = {}_nS_{k-1} + k\,_nS_k$$

n+1コの数字をkコのグループに分ける動作は、
1つの数字に着目したとき、
「その数が単独でグループを形成」、
「その数が複数の数字とグループを形成」
の2つの場合がある。

$$\therefore\ _{n+1}S_k = \underbrace{_nS_{k-1}} + \underbrace{_nS_k \times k}$$

nコでkのグループを形成し、
特定の数の所属先をえらぶ

(2)

$$_5S_3 = {}_4S_2 + 3\times{}_4S_3$$

$$= \left({}_3S_1 + 2\times{}_3S_2\right) + 3\left({}_3S_2 + 3\times{}_3S_3\right)$$

$$= {}_3S_1 + 5\,_3S_2 + 9\,_3S_3$$

$$= {}_3S_1 + 5\left({}_2S_1 + 2\times{}_2S_2\right) + 9\,_3S_3$$

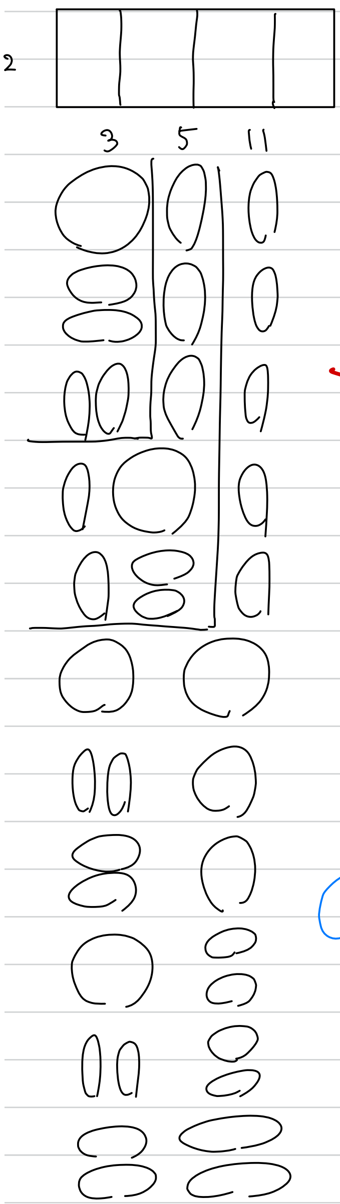
$$= 1 + 5\left(1 + 2\times1\right) + 9\times1$$

$$= 1 + 15 + 9$$

$$= 25$$

19

8



(1) 2×2のうめ方は，

(i) 正 ×1

(ii) たて長 ×2

(iii) よこ長 ×2

である．この 2×2 のとり方は，

$n-1$ 通り．

Q A_{n-2} と A_{n-1} の状態から，

A_n への行き方を考える．

(1) case(i) $n-1$ でタイルがもれる

ここからのうめ方は 1通り，

Case(ii) $n-2$ でタイルがもれる．

よこが1余まるようにうめると，(i)にあてはまるので，

ここからのうめ方は2通り．

以上より，

$$A_n = A_{n-1} + 2A_{n-2}$$

$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$

$(\alpha-2)(\alpha+1) = 0$

$\alpha = 2, -1$，

(2) 特性方程式は，

$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$

$(\alpha-2)(\alpha+1) = 0$

$\therefore \alpha = 2, -1$

ここで，$A_n = A \cdot 2^n + B(-1)^n$ とおくと，

$A_1 = 1$，$A_2 = 3$ より，

$$\begin{cases} 1 = 2A - B \\ 3 = 4A + B \end{cases}$$

$\therefore 6A = 4$

$\therefore A = \frac{2}{3}$，$B = \frac{1}{3}$

$\therefore A_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n$

19

全てうめきるためには，n回とり出す内，
大きいタイルが3枚以下であればよい．

(i) $n=9$ (タイル$=3$)

$$_9C_3\, q^3 p^6 = 84p^6q^3$$

(ii) $n=12$ (タイル$=2$)

$$_{12}C_2\, q^2 p^{10} = 66p^{10}q^2$$

(iii) $n=15$ (タイル$=1$)

$$_{15}C_1\, q^1 p^{14} = 15p^{14}q$$

(iv) $n=18$ (タイル$=0$)

$$_{18}C_0\, p^{18} = p^{18}$$

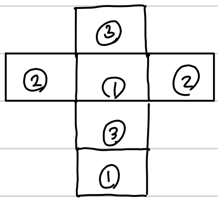
解答はかけなかったけど，
考えok

10

最っよ　12

9

同じ色の面がとなりあわないためには、
3色必要、またそれぞれ2回使う。



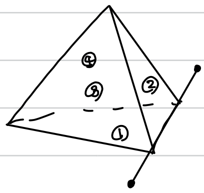
$$\left(1\times\frac{1}{N}\right)\times\left(\frac{N-1}{N}\times\frac{1}{N}\right)\times\left(\frac{N-2}{N}\times\frac{1}{N}\right)$$

$$=\frac{(N-1)(N-2)}{N^4}$$

11

最っよ.　15

9



①　②　①③④
①　③　①②③
①　④　①②③

P_{n-1} が P_n に関与する. $n-1$回目で ①のとき,
n回目で ①にくる確率は0なので,

$$P_n = P_{n-1}\times 0 + (1-P_{n-1})\times\frac{1}{3}$$

$$\therefore P_n = -\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}$$

特性方程式は,

$$\alpha = -\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{4}$$

これより,

$$P_n-\frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(P_{n-1}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(P_0-\frac{1}{4}\right)$$

ここで $P_0=1$ より,

$$P_n-\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\cdot\frac{3}{4}$$

$$\therefore P_n = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}$$

[2]

17

No. j 人目とNo. $j-1$ 人目の関係より、

$$R_j = R_{j-1} \times p + (1 - R_{j-1}) \times (1-p)$$

$$R_{j-1} \xrightarrow{p} R_j$$

$$1 - R_{j-1} \xrightarrow[1-p]{} R_j$$

となるので、

$$R_j = pR_{j-1} + 1 - p + (p-1)R_{j-1}$$

$$= (2p-1)R_{j-1} - p + 1$$

特性方程式は、

$$\alpha = (2p-1)\alpha - p + 1$$

$$(-2p+2)\alpha = -p+1$$

$$2(-p+1)\alpha = -p+1$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{2}$$

より、

$$R_j - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(R_{j-1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= (2p-1)^n\left(R_0 - \frac{1}{2}\right)$$

ここで、$R_0 = 1$ より、

$$R_j - \frac{1}{2} = (2p-1)^n \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore R_j = \frac{1}{2}\cdot(2p-1)^n + \frac{1}{2}$$

13

(1) $E[X] = \sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_nC_k \left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$

$= \frac{n}{2}$

(2) $k=0$ のとき,

全ての色が赤もしくは白

$2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$k=1$ のとき,

0

$k=2$ のとき,

1人だけ色が異なる.　miss　1人に限らず,色が大きく2つにわかれていれば,ok

$2 \times {}_nC_1 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

nヶ所から区切れる場所を探す.

${}_nC_2$

赤,白 2通りなので,

$\frac{{}_nC_2 \times 2}{2^n} = \frac{n(n-1)}{2^n}$

任意のkのとき,

はたの場所の選び方は,

${}_nC_k$.

色のえらび方は,1ヶ所決まれば全て決まるので,

2通り.

$\therefore \frac{2 \times {}_nC_k}{2^n} = \frac{{}_nC_k}{2^{n-1}}$

9/10

14

(1) Case(i) $n-1$ が7でわれた

$$P_n = 0$$

Case(ii) $n-1$ が7でわれない.

余りが 1〜6 である.

Case(ii-I) 余り1

$$P_n' = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

2〜6も同様なので,

$$P_n = \frac{1}{6}$$

以上より,

$$P_n = P_{n-1} \times 0 + (1 - P_{n-1}) \times \frac{1}{6}$$

$$P_n = -\frac{1}{6} P_{n-1} + \frac{1}{6}$$ 図

(2) 特性方程式

$$6\alpha = -\alpha + 1$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{7}$$

より,

$$P_n - \frac{1}{7} = -\frac{1}{6}\left(P_{n-1} - \frac{1}{7}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(P_1 - \frac{1}{7}\right)$$

$P_1 = 0$ より,

$$P_n - \frac{1}{7} = \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{7}\right)$$

$$\therefore P_n = \frac{1}{7}\left\{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

$\boxed{15}$ 15

(1) (i) $n-1$ 回目で X が割りきれる。

n回目で、3 or 6 $\therefore \frac{1}{3}$

(ii) 割りきれない。

余りが 1 or 2 なので、

1のとき、

2, 5 $\therefore \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

2のとき、

1, 4 $\therefore \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\therefore \frac{1}{3}$

Q $Y_1 \sim Y_n$ の和を考えていた。

以上より、

$$P_n = \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3}(1-P_{n-1})$$
$$= \frac{1}{3}$$

(2) (i) $n-1$: わりきれる。

$\frac{1}{6}$

(ii) $n-1$: わりきれない。

$\frac{1}{6}$

$\therefore q_n = \frac{1}{6}$

(3) (i) $n-1$: わりきれる

$\therefore \frac{1}{6}$

(ii) $n-1$: わりきれない。

余り	出るべき。
1	3
2	2 or 6
3	1 or 5

$$\therefore \frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+2\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

したがって、

$$P_n = \frac{1}{6}P_{n-1}+\frac{1}{3}(1-P_{n-1})$$
$$= -\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}$$

より、

$$P_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(P_{n-1}-\frac{1}{4}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(P_1-\frac{1}{4}\right)$$

$\frac{1}{6}-\frac{1}{4} = \frac{2-3}{12}$

$P_1 = \frac{1}{6}$ より、

$$P_n = -\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}+\frac{1}{4}$$

(1) 「積なので，$Y_1 \sim Y_n$ の内，少なくとも1つが，
3 or 6 であればよい．」

余事象は，

「$Y_1 \sim Y_n$ が全て 3 or 6 で無い」

$$1 - p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$p_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(2) 「$Y_1 \sim Y_n$ に 6 がある．
or
$Y_1 \sim Y_n$ に 2と3 もしくは 3と4 がある」

余事象は，
「$Y_1 \sim Y_n$ に 6がない
AND
$Y_1 \sim Y_n$ に 2,4 と 3 が同時にない」

$$\begin{cases} 1, 3, 5 & \cdots \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1, 2, 4, 5 & \cdots \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases}$$

全て 1, 5 の確率がダブってるので，

$$1 - q_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$q_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(3) 「4が 1つ以上ある
or
2もしくは6が合わせて2つ以上ある」

余事像は，
「1, 3, 6のみでる．
or
2が1回，あとは1, 3, 6
6が1回，あとは1, 3, 6」

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ n\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ n\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$$

$$\therefore r_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

9/11

16

$a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ c_0 = 0$

16

(1) $a_n = a_{n-1} \times 0 + b_{n-1} \times \frac{1}{3} + c_{n-1} \times \frac{2}{3}$

$= \frac{1}{3} b_{n-1} + \frac{2}{3} c_{n-1} \quad \cdots ①$

$b_n = a_{n-1} \times \frac{1}{3} + b_{n-1} \times \frac{2}{3} + c_{n-1} \times 0$

$= \frac{1}{3} a_{n-1} + \frac{2}{3} b_{n-1} \quad \cdots ②$

$c_n = a_{n-1} \times \frac{2}{3} + b_{n-1} \times 0 + c_{n-1} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{2}{3} a_{n-1} + \frac{1}{3} c_{n-1} \quad \cdots ③$

(2) ①より，

$a_{n+1} = \frac{1}{3} b_n + \frac{2}{3} c_n$

これに②，③を代入して，b_n, c_nを消すと，

$a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} a_{n-1} + \frac{2}{3} b_{n-1}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} a_{n-1} + \frac{1}{3} c_{n-1}\right)$

$= \frac{5}{9} a_{n-1} + \frac{2}{9}\left(b_{n-1} + c_{n-1}\right)$

ここで，$a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = 1$ より，

$a_{n+1} = \frac{5}{9} a_{n-1} + \frac{2}{9}\left(1 - a_{n-1}\right)$

$= \frac{3}{9} a_{n-1} + \frac{2}{9}$

となる．これより，

$a_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{3}{9}\left(a_{n-1} - \frac{1}{3}\right)$

$a_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(a_{n-2} - \frac{1}{3}\right) \qquad 4 \to 2 \to 0$

Case (i) nが偶数

$a_n - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(a_0 - \frac{1}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{2}{3}$

$\therefore a_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{3}$

Case (ii) nが奇数

$a_n - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(a_1 - \frac{1}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$

$\therefore a_n = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{3}$

17　　　　　　　　　　　　　　　　13

$n-1$回目後について、
Case (i) 赤が3ある.

$$P_n = \left(\frac{N}{N+3}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{N+3} = \frac{N^{n-1}\cdot 3}{(N+3)^n}$$

Case (ii) 赤が2ある.

$$P_n = {}_{n-1}C_1 \left(\frac{3}{N+3}\right)\left(\frac{N}{N+3}\right)^{n-2} \cdot \frac{2}{N+3}$$

$$= (n-1)\frac{N^{n-2}\cdot 2\cdot 3}{(N+3)^n}$$

Case (iii) 赤が1ある.

$$P_n = {}_{n-1}C_2 \left(\frac{3}{N+3}\right)^2 \left(\frac{N}{N+3}\right)^{n-3} \frac{1}{N+3}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \frac{\quad}{(N+3)^N}$$

◎ 赤玉に区別がないとき、
左のように、何コ残っているかで
場合わけしなければならなくなる.

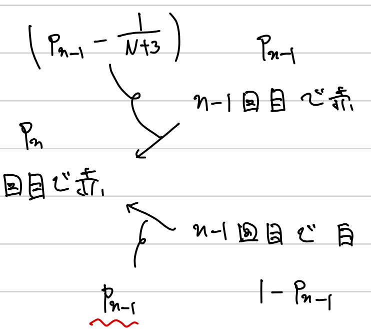
→ 区別をつけて、それぞれがn回目
に引かれるPrを考える.

3つの赤玉をA, B, Cとすると、
Aがn回目に引かれるPrは、

$$\left(\frac{N+2}{N+3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{N+3} = \frac{(N+2)^{n-1}}{(N+3)^n}$$

B, Cも同様なので、求めるべきPrは、

$$3\times \frac{(N+2)^{n-1}}{(N+3)^n} = \frac{3(N+2)^{n-1}}{(N+3)^n}$$



ココでのP_{n-1}は、
$n-1$回目後において、
単に赤がでるPrと考えればよい.
∵ P_nは変動するため.

〈漸化式〉

$$P_n = P_{n-1} \times \left(\cancel{P_{n-1}} - \frac{1}{N+3}\right) + (1-\cancel{P_{n-1}}) \times P_{n-1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{N+3}\right) P_{n-1}$$

$$= \left(\frac{N+2}{N+3}\right)^{n-1} P_1$$

$$= \left(\frac{N+2}{N+3}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{N+3}$$

$$= \frac{3(N+2)^{n-1}}{(N+3)^n}$$

$\boxed{18}$

15

(1) $a_1 = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$

$= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

(2) $n+1$回目にAにいるためには、

$n-1$回目でAがCにいればよい。

$n-1$回目でBもしくはCにいるとき、AにいくProは0なので、

$a_{n+1} = \frac{5}{18} \times a_n + \left\{ 0 + 0 + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \right) \right\} \times (1 - a_n)$

$= \frac{5}{18} a_n + \frac{13}{18}(1 - a_n)$

$= -\frac{8}{18} a_n + \frac{13}{18}$

$a_{n+1} = -\frac{4}{9} a_n + \frac{13}{18}$

$18\alpha = -8\alpha + 13$

(3) (2)の式は、以下のようにできる。

$26\alpha = 13$

$a_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{9}\left(a_n - \frac{1}{2}\right)$

$= \left(-\frac{4}{9}\right)^n \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)$

$\frac{5}{18} - \frac{9}{18}$

$= \left(-\frac{4}{9}\right)^n \cdot \left(-\frac{4}{18}\right)$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{9}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}$

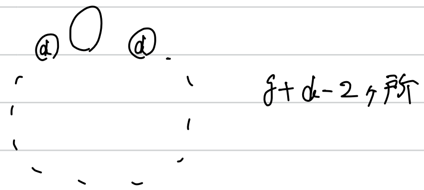
$\therefore a_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{9}\right)^n + \frac{1}{2}$

Re:1　9/10

$\boxed{1}$　7

(1) $g+d-2$ヶ所からガラスをおく所を
gヶ所えらび，残った所にダイヤを入れればよい。

$$\therefore\ {}_{g+d-2}C_{g} = \frac{(g+d-2)!}{g!(d-2)!}$$



(2) gコを並べその間の $g-1$ヶ所から選べばよい。
ただし，$d-2 \geq g$ のとき，0通り，

$$ {}_{g-1}C_{d-2} = \frac{(g-1)!}{(g-d+1)!(d-2)!}$$

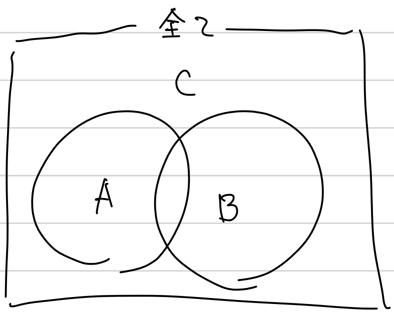
$\boxed{2}$

(1) (I) $P(A) = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

(II) $P(B) = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$　　Confirm.

(III)「1でないかつ偶数でない」
$\Leftrightarrow$「3 or 5」

$$P(C) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$



(2) $P(A\cup B) = 1-P(C) = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

(3) $P(A\cap \bar{B}) = P(A\cup B) - P(B) = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$
$= \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(4) $A\cap B = P(A) - P(A\cap \bar{B})$
$= 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

③

余事象を考える。 | 2

$M_n - m_n \leq 1$ をみたす場合は、

$(M_n, m_n) = (2,1)\ (3,2)$
$(4,3)\ (5,4)\ (6,5)$
$(1,1)\ (2,2)\ (3,3)$
$(4,4)\ (5,5)\ (6,6)$

miss Case(i) $(2,1)$ 「2」だけ、「1」だけが含まれている。

$P[M_n = 2, m_n = 1] = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$M_n - m_n \leq 1$ かつ $M_n \neq m_n$ は全て同様。

OK Case(ii) $(1,1)$

$P[M_n = m_n = 1] = \left(\frac{1}{6}\right)^n$

以上より、

$P[M_n - m_n \leq 1] = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$\therefore P[M_n - m_n > 1] = 1 - \left\{5\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$

④ 7

(1) 最大5で、全て5以下である確率。

$P(X_n = 5) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

(2) 全てのサイコロの目が2〜5で、
2, 5が少なくとも1回でる確率。

2つとも「2」と「5」がでないPrを含んでいる。

$P(X_n = 5, Y_n = 2) = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

6

(1) 最大がkで，全てk以下の確率

$$P[X=k] = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n$$

(2)

$$P[Y=k] = \left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \left(\frac{6-k}{6}\right)^n$$

これより，

$$E[X] - E[Y]$$

$$= \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\} - \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \left(\frac{6-k}{6}\right)^n\right\}$$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{6}\left\{k\left(\frac{k}{6}\right)^n - k\left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{6}\left\{k\left(\frac{k}{6}\right)^n - (k-1)\left(\frac{k-1}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\}$$

$$= \left\{6\cdot\left(\frac{6}{6}\right)^n - 0\right\} - \left\{0 + \left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{6}\right)^n + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}$$

$$E[Y] = \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \left(\frac{6-k}{6}\right)^n\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{6}\left\{k\left(\frac{7-k}{6}\right)^n - (k+1)\left(\frac{6-k}{6}\right)^n + \left(\frac{6-k}{6}\right)^n\right\}$$

$$= \left\{1 - 0\right\} + \left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{6}\right)^n + \cdots + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

これより，

$$E[X] - E[Y] = 5 - 2\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^n + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}$$

7

12

(1) $_{n+1}S_k = {}_nS_{k-1} + k\,{}_nS_k$

n+1の数字をkのグループに分けるとき，
1つの数字について，所属グループに
他の数字が含まれていない場合と，含まれている場合がある．
それぞれの分け方は，
Case(i) 含まれていない．
n コで k−1 のグループを形成するので，
$_nS_{k-1}$
Case(ii) 含まれている．
kのグループから1つ選ぶので，
$k\,{}_nS_k$

以上より，　　　　　$_nC_k =$

$_{n+1}S_k = {}_nS_{k-1} + k\,{}_nS_k$

(2) $_5S_3 = {}_4S_2 + 3\,{}_4S_3$

$= ({}_3S_1 + 2\,{}_3S_2) + 3({}_3S_2 + 3\,{}_3S_3)$

$= {}_3S_1 + 2({}_2S_1 + 2\,{}_2S_2) + 3({}_2S_1 + 2\,{}_2S_2) + 9\,{}_3S_3$

$= {}_3S_1 + 5\,{}_2S_1 + 10\,{}_2S_2 + 9\,{}_3S_3$

$= 1 + 5 + 10 + 9$

$= 25$

8

(1) $A_{n-2} \to A_n$

(i) 正方形である

(ii) 横長の長方形である

∴ 2通り

$A_{n-1} \to A_n$

(i) 縦長の長方形である。

∴ 1通り、

したがって、

$$A_n = A_{n-1} + 2A_{n-2}$$

12

(2) 特性方程式は、

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

$$(\alpha - 2)(\alpha + 1) = 0$$

$$\therefore \alpha = 2, -1$$

(I)

$$\begin{cases} A_n + A_{n-1} = 2(A_{n-1} + A_{n-2}) \\ A_n - 2A_{n-1} = -(A_{n-1} - 2A_{n-2}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_n + A_{n-1} = 2^{n-2}(A_2 + A_1) \\ A_n - 2A_{n-1} = (-1)^{n-2}(A_2 - 2A_1) \end{cases}$$

$A_2 = 3$, $A_1 = 1$ より、

$$\begin{cases} A_n + A_{n-1} = 4 \cdot 2^{n-2} \\ A_n - 2A_{n-1} = (-1)^{n-2} (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_n + A_{n-1} = 2^n & \cdots ① \\ A_n - 2A_{n-1} = (-1)^{n-2} & \cdots ② \end{cases}$$

① × 2 + ② より、

$$3A_n = 2^{n+1} + (-1)^{n-2}$$

$$\therefore A_n = \frac{1}{3} 2^{n+1} + \frac{1}{3}(-1)^{n-2}$$

(ii) $A_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n$ とおくと、

$A_1 = 1$, $A_2 = 3$ より、

$$\begin{cases} 1 = -\alpha + 2\beta \\ 3 = \alpha + 4\beta \end{cases}$$

$$6\beta = 4$$

$$\therefore \beta = \frac{2}{3}, \quad \alpha = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore A_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3} 2^n$$

$\boxed{13}$

(1) $\frac{n}{2}$

(2)(ア)(i) $k=0$

全員 赤もしくは白.

$$\therefore P_0 = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

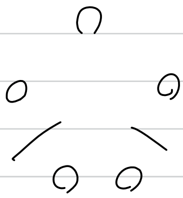
(ii) $k=1$

赤と白 の境い目は必ず偶数コあるので,
ありえない.

$$\therefore P_1 = 0$$

(iii) $k=2$

$n-1$ヶ所から境目を2つえらべばよく,
赤,白2通りあるので,



$$\therefore P_2 = \frac{{}_{\cancel{n-1}\ n}C_2}{2^n}\cdot 2 = \frac{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}{2^n}\cdot 2$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2^n}$$

(イ) $n-1$ヶ所からkヶ所えらべばよい.
ただし,1人のぼうしの色をきめれば,
全員きまる.

$$P_k = 2\,\frac{{}_{n-1}C_k}{2^n}$$

$$\therefore P_k = \begin{cases} \dfrac{{}_{n-1}C_k}{2^{n-1}} & ぐう \\ 0 & き. \end{cases}$$

15

(1) 少なくとも1つ 3,6 があればよい.
余事象を考えると,

$$p_n = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(2) 6が1つ,もしくは 2の倍数 (2,4), 3が1つずつでればよい.
余事象を考える.

Case(i) 3,6 がでない,

$$\left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Case(ii) 2,4,6 がでない、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ここで,(i),(ii)どちらにも 1, 5 のみがでる事象が含まれていることを考慮すると,

$$1-q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore q_n = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(3) 4が1つ,もしくは 2と6があわせて2つでればよい.
余事象を考えると,

チョイみす.

Case(i) 2が1回で2, 4,6がでない.

$$n\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Case(ii) 6が1回で2, 2,4がでない.

$$n\times\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Case(iii) 2,4,6 がでない.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

これより,

$$1-r_n = 2\times\frac{n}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$r_n = 1-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Re=1 9/14

$\boxed{17}$

9

(i) 赤球3つを, A, B, C とする,

Aがn回目にとりだされる確率は,

$$P(A) = \left(\frac{N+2}{N+3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{N+3} = \frac{(N+2)^{n-1}}{(N+3)^n}$$

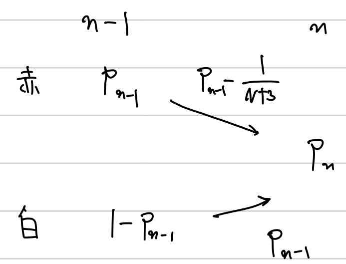
B, Cの確率も同様であるので,

n回目で赤球がとりだされる確率は,

$$P_n = \frac{3(N+2)^{n-1}}{(N+3)^n}$$

(ii) n回目で赤がとりだされるとき,

n−1回目で, 白をとる場合と赤をとる場合がある.



$$\begin{aligned}
P_n &= P_{n-1} \times \left(P_{n-1} - \frac{1}{N+3}\right) + (1-P_{n-1}) \times P_{n-1} \\
&= -\frac{1}{N+3} P_{n-1} + P_{n-1} \\
&= \frac{N+2}{N+3} P_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_n &= \left(\frac{N+2}{N+3}\right)^{n-1} P_0 \\
&= \left(\frac{N+2}{N+3}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{N+3} \\
&= \frac{3(N+2)^{n-1}}{(N+3)^n}.
\end{aligned}$$

Re:2 9/13

$\boxed{3}$

余事象を考える.

$M_n - m_n \leq 1$ となる場合は,

Case (i) $M_n - m_n = 1$

$(m_n, M_n) = (1, 2), (2, 3), (3, 4)$
$(4, 5), (5, 6)$

$(1, 2)$ について,

サイの目がすべて 1 or 2 であればよい.

ただし, 全て 1, 2 の場合は除くので,

$$P(1, 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

であり, 全ての場合同様なので,

$$P(M_n - m_n = 1) = 5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

Case (ii) $M_n - m_n = 0$

全て同じ目がでればよい.

$$P(M_n - m_n = 0) = 6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

以上より, $M_n - m_n > 1$ の確率は,

$$P(M_n - m_n > 1) = 1 - 5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} - 6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$= 1 - 5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 4\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

9

9

(1) $P(X=k)$は，全ての目がk以下から，
全ての目が$k-1$以下を除いたものと等しい。

$$P(X=k) = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n$$

(2)
$$P(Y=k) = \left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \left(\frac{6-k}{6}\right)^n$$

より，

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\} \\
&= \frac{1}{6^n}\sum_{k=1}^{6}\left\{k\cdot k^n - k(k-1)^n\right\} \\
&= \frac{1}{6^n}\sum_{k=1}^{6}\left\{k^{n+1} - (k-1)^{n+1} - (k-1)^n\right\} \\
&= \frac{1}{6^n}\left\{6^{n+1} - (1^n + 2^n + \cdots 5^n)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \left(\frac{6-k}{6}\right)^n\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{6}\left\{k\left(\frac{7-k}{6}\right)^n - (k+1)\left(\frac{6-k}{6}\right)^n + \left(\frac{6-k}{6}\right)^n\right\} \\
&= \{1 - 0\} + \left(\frac{5}{6} + \cdots + \frac{1}{6}\right)
\end{aligned}$$

$$E(X) - E(Y) = 5 - 2\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^n + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}$$