9/17

Pro 25

引いてしまうと、総数が変化してしまうためNG → 前が引かれていない状態で、5回目 or 6回目をひくのはok

(1) $_4C_1\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)^3 = 4\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3$

$= \frac{32}{81}$

$\therefore \frac{3}{7}\times\frac{4}{6} + \frac{4}{7}\times\frac{3}{6}$

6回目赤 7:白　6:白 7:赤

(2) $_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$

最後が白であるためには、merely $\frac{2}{3}$

Pro 27

(1) 1回目で終了するPro

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

余事象より、求めるべきは、

$\frac{7}{8}$.

Q コインを独立して考える.

(2) 1回目をおえた時点で、3, 2, 1 枚残っている場合があるので、

$\frac{7}{8}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right\}$

$= \frac{7}{8}\times\frac{1+2+4}{8}$

$= \frac{49}{64}$

(3) 2回目までで終了のPro

$\frac{1}{8}+\frac{49}{64} = \frac{8+49}{64} = \frac{57}{64}$

2回目で終了しない

$\therefore 1-\frac{57}{64} = \frac{7}{64}$

(4)

(2) 1つのコインが2回目以内で終了 Pro

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$\therefore \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{27}{64}$

2回目で終了Pro

$\frac{27}{64}-\frac{8}{64} = \frac{19}{64}$

(3) $1-\frac{27}{64} = \frac{37}{64}$

(4) $_3C_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$

Ex 41

x : +1 の回数　　　　6

y : −1

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(8+n) \\ y = \frac{1}{2}(8-n) \end{cases} \quad (n \neq 奇数)$$

これより, n となるためには, ぐうが $\frac{1}{2}(8+n)$ 回, きが $\frac{1}{2}(8-n)$ 回必要.

$${}_8C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^y = {}_8C_{\frac{1}{2}(8+n)}\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

Pra 28

オモテ, ウラの回数を x, y とおくと, 以下をみたす.

$$\begin{cases} x + y = n \\ x - y = m \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(n+m) \\ y = \frac{1}{2}(n-m) \end{cases}$$

したがって, m にいる確率は,

$$P[X_n = m] = {}_nC_x (p)^x (1-p)^y$$

$$= {}_nC_{\frac{1}{2}(n+m)}\, p^{\frac{1}{2}(n+m)} (1-p)^{\frac{1}{2}(n-m)}$$

Ex 42

20

(1) Case(i) n が偶

$$P = Q = \frac{1}{2}$$

Case(ii) n が奇,

$$(\text{偶がでる}) = \frac{\frac{n-1}{2}}{n} = \frac{n-1}{2n}$$

$$(\text{奇がでる}) = \frac{\frac{n+1}{2}}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

$$P = \left(\frac{n-1}{2n}\right)^2 + \left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 = \frac{2n^2+2}{4n^2} = \frac{n^2+1}{2n^2}$$

$$Q = 1 - P = \frac{n^2-1}{2n^2}$$

(2) Case(i) $X \leq n+1$

場合の数は単調増加.

$$R(k) = \frac{k-1}{n^2}$$

和	2	3	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$\cdots$	$2n$
場	1	2		$n-2$	$n-1$	n	$n-1$		1

Case(ii) $X \geq n+1$

場合の数は単調減少

$$R(k) = \frac{2n+1-k}{n^2}$$

(3) Case(i) $X \leq n+1$

$$S(k) = \sum_{l=2}^{k} \frac{l-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{2}(k-1)(k+2) - (k-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2}(k-1)\left\{\frac{1}{2}(k+2) - 1\right\}$$

$$\doteqdot \frac{k(k-1)}{n^2}$$

Case(ii) $X \geq n+1$

$$S(k) = \sum_{l=2}^{n} \frac{l-1}{n^2} + \sum_{l=n+1}^{k} \frac{2n+1-l}{n^2}$$

$$= \frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{n^2}\left\{(2n+1)(k-n) - \frac{1}{2}(k-n)(k+n+1)\right\}$$

$$\frac{1}{n^2} \frac{k-n}{2}\left\{4n+2 - (k+n+1)\right\}$$

$$= \frac{2n^2-2n}{2n^2} \quad \frac{k-n}{2n^2}(-k+3n+1)$$

37

(1) $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}p_{n-1}$

$\alpha^2 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}$

$\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} = 0$

$\alpha = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2}}{2}$

$= \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} = \frac{1 \pm 3}{4} = 1, -\frac{1}{2}$

(2) $P_n = A \cdot 1^n + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ とおく。

$P_0 = 1$, $P_1 = \frac{1}{2}$ より、

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ \frac{1}{2} = A - \frac{1}{2}B \end{cases}$$

$\therefore A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{3}$

$\therefore P_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

38

(1) $k+1$枚から、負けてk枚になるときと、

$k-1$枚から、かってk枚になるときがある。

$p_k = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1}$

より、

$p_{k+1} = 2p_k - p_{k-1}$

$\alpha^2 = 2\alpha - 1$

$(\alpha - 1)^2 = 0$

$\alpha = 1$

(2) $P_{k+1} - P_k = P_k - P_{k-1}$

$= P_{k-1} - P_{k-2}$

$= P_1 - P_0$

$= P_1$

$\sum_{l=0}^{k-1} P_{l+1} - P_l = \sum_{l=0}^{k-1} P_1$

$P_k - P_0 = kP_1$

$\therefore P_k = kP_1$

$k = n$ のとき、

$1 = nP_1$ $\therefore P_1 = \frac{1}{n}$

$\therefore P_k = \frac{k}{n}$