9/19

3

余事象を考える.

8

Case(I) $M_n - m_n = 0$

全て同じ値がでるということである.

この確率 P_0 は,

$$P_0 = 6\times\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

Case(II) $M_n - m_n = 1$

以下の場合がある.

$(m_n, M_n) = (1, 2), (2, 3), (3, 4)$
$(4, 5), (5, 6)$

$(1, 2)$ となる確率は,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\times\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

他の場合も同様の確率なので

$$P_1 = 5\times\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

以上より, 求めるべき確率は,

$$1 - P_0 - P_1 = 1 - \left\{6\times\left(\frac{1}{6}\right)^n + 5\times\left(\frac{1}{3}\right)^n - 10\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

$$= 1 - \left\{5\times\left(\frac{1}{3}\right)^n - 4\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$ 答

4

(1) 5が少なくとも1つ出て、全て5以下であればよい。

8

$$P(X_n = 5) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n$$

(2) 2と5が少なくとも1つずつ出て、2,3,4,5のみが出ればよい。

余事象を考える。

Confirm

Case(I) 2がでない

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(2 or 3 or 4 or 5)

Case(II) 5がでない

余事象ではない。

$-$(5がでない)$-$(2がでない)$+$(2と5がでない)

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Case(III) 2と5がでない

$\left(\frac{1}{3}\right)^n$

これより、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^n = P(X_n = 5,\ Y_n = 2) + \left\{2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

1かと思った。 → 1,5は考えない。

5

jとiが少なくとも1つずつ出て、全てi~jであればよい。

7

余事象を考えと、

(jがM_n, iがm_n) = (i~jがでる) $-$ (iがでない)

$-$ (jがでない) $+$ (iとjがでない)

より、

$$P(M_n = j,\ m_n = i) = \left(\frac{j-i+1}{6}\right)^n - 2\left(\frac{j-i}{6}\right)^n + \left(\frac{j-i-1}{6}\right)^n$$

6

(1) 少なくとも1回kがでて，全てk以下であればよい．

15

$$P[X=k] = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n$$

(2) P[Y=k]を求める．

$$P[Y=k] = \left(\frac{6-k+1}{6}\right)^n - \left(\frac{6-k}{6}\right)^n$$

$$= \left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \left(\frac{6-k}{6}\right)^n$$

より，

$$E[X] = \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\}$$

$$= \frac{1}{6^n}\sum_{k=1}^{6}\left\{\left(k^{n+1} - (k-1)^{n+1}\right) - (k-1)^n\right\}$$

$$= \frac{1}{6^n}\left\{6^{n+1} - \left(1^n + 2^n + \cdots 5^n\right)\right\} \cdots ①$$

$$E[Y] = \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \left(\frac{6-k}{6}\right)^n\right\}$$

$$= \frac{1}{6^n}\sum_{k=1}^{6}\left\{\left(k(7-k)^n - (k+1)(6-k)^n\right) + (6-k)^n\right\}$$

$$= \frac{1}{6^n}\left\{1\cdot 6^n + \left(1^n + 2^n + \cdots + 5^n\right)\right\} \cdots ②$$

① + ② より，

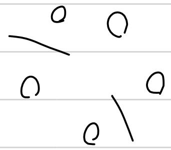
$$E[X] - E[Y] = 5 - \frac{2}{6^n}\left(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n\right)$$

9/20

[13]

(2) ㋐ $p_2 = \dfrac{2\times {}_nC_2}{2^n}$

㋑ $p_5 = \dfrac{2\times {}_nC_5}{2^n}$



[15]

14

$X = Y_1 \cdot Y_2 \cdots Y_n$

(1) 3もしくは6が少なくとも1回でればよい。
余事象を考えると，

$$1 - p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\therefore p_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(2) 6が1回，2と3が1回ずつ，3と4が1回ずつ
少なくとも以上の3つの場合をみたせば，6でわれる。
余事象を考えると，

Case(i) 1, 2, 4, 5がでる。

$\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Case(ii) 1, 3, 5がでる

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Case(iii) 1, 5がでる。

$\left(\frac{1}{3}\right)^n$

以上より，

$$1 - p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore p_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(3) 少なくとも，4が1回もしくは，2と6が合わせて2回でればよい。
余事象を考える。

Case(i) 2, 4, 6がでない。

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Case(ii) 1回2がでて，後は1, 3, 5

${}_nC_1\left(\frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Case(iii) 1回6がでて，後は1, 3, 5

${}_nC_1\left(\frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$1 - p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

四

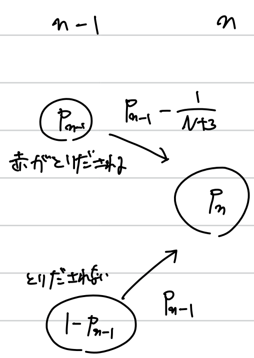
(i) 赤球にA, B, Cと区別をつける.

n回目にAがとりだされる確率は,

$$\left(\frac{N+2}{N+3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{N+3}$$

B, Cも同様なので,

$$p_n=\frac{3(N+2)^{n-1}}{(N+3)^n}$$



(ii)

$$p_n=p_{n-1}\times\left(p_{n-1}-\frac{1}{N+3}\right)+\left(1-p_{n-1}\right)\times p_{n-1}$$

$$=\left(-\frac{1}{N+3}+1\right)p_{n-1}$$

$$=\frac{N+2}{N+3}p_{n-1}$$

$$=\left(\frac{N+2}{N+3}\right)^{n-1}p_0$$

$$=\left(\frac{N+2}{N+3}\right)^{n-1}\times\frac{3}{N+3}$$

$$=\frac{3(N+2)^{n-1}}{(N+3)^n}$$